SISTEMI LINEARI:
APPROFONDIMENTI ED ESEMPI

Appunti presi dalle lezioni del prof. Nedo Checcaglini
Liceo Scientifico di Castiglion Fiorentino (Classe 4B)

January 17, 2005

1 SISTEMI LINEARI

Se $a_{ik},\ b_i \in R$, un sistema del tipo:

$$(1)\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

si dice *sistema lineare*, o sistema di m equazioni lineari ed n incognite: $x_1,\ x_2, ...x_n$.

Ogni insieme ordinato di n numeri, $r_1,\ r_2, ..., r_n$ che soddisfino le equazioni del sistema, si dice sua soluzione.

Il sistema (1) si dice compatibile se ammette almeno una soluzione; incompatibile nel caso opposto.

Il sistema (1), posto

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ si può anche scrivere sotto forma matriciale: $AX = B$.

Le matrici

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$ di ordine $(m; n)$ e $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$ di ordine $(m; n + 1)$ sono dette rispettivamente **matrice incompleta** (o dei coefficienti) e **matrice completa** (o dei coefficienti e dei termini noti).

Non appare superfluo ricordare le seguenti definizioni:

Def. *Si chiama* ***minore d'ordine p****, estratto dalla matrice A, un qualunque determinante, d'ordine p, ottenuto con gli elementi comuni a p righe e a p colonne della matrice A.*

Def. *Si chiama* ***rango*** (o ***caratteristica****) di una matrice, l'ordine massimo dei suoi minori non nulli.*

Chiaramente il rango (o caratteristica) della matrice incompleta *è minore od uguale* di quella della matrice completa (che contiene la matrice incompleta come sua sottomatrice).

Per quanto riguarda la risolubilità o meno del sistema (1), vale il seguente:

Teorema di Rouché-Capelli. *Un sistema di equazioni lineari (1) ammette soluzioni (una o infinite) se e solo se la matrice incompleta e la matrice completa hanno lo stesso rango (o caratteristica).*

Il teorema enunciato permette di stabilire se il sistema dato è compatibile o no e ci garantisce l'esistenza di almeno una soluzione del sistema stesso; tuttavia non ci dà la regola pratica per trovare tutte le soluzioni di un sistema dato.

Esaminiamo ora i casi: I) $m = n$ (caso più comune, specialmente con $m = n = 3$) e II) $m \neq n$.

1.1 Sistemi di n equazioni in n incognite

Se $m = n$ si avrà:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{m2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Conviene così procedere:

Se **det $\boldsymbol{A = D \neq 0}$**, il sistema si dice *crameriano*, ammette **una e una sola soluzione**, e può essere risolto:

• col metodo della matrice inversa $X = A^{-1}B$,

• oppure con la regola di Cramer (metodo più semplice a cui faremo riferimento):

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ ....,\ x_n = \frac{D_n}{D},$$

dove D_i $(i = 1,\ 2,\ ....,\ n)$ è il determinante ottenuto da D sostituendo alla i^{ma} colonna quella dei termini noti B.

Se $detA = D = 0$, il sistema ammette **infinite soluzioni** se il rango della matrice incompleta è uguale a quello della matrice completa, **nessuna soluzione** se il rango della matrice incompleta è minore di quello della matrice completa.

Più precisamente, nel caso che si abbiano soluzioni, vale la seguente **regola pratica**:

Sia k il rango della matrice incompleta (e completa).

1. *Si considerano soltanto k delle n equazioni del sistema, trascurando le altre eventuali n - k equazioni; la scelta delle k equazioni non è però arbitraria ma deve essere fatta in modo che il rango dei coefficienti di queste equazioni sia proprio k.*

2. *In tal modo si viene a considerare un sistema di sole k equazioni in n incognite.*

3. *In quest'ultimo sistema si prendono k incognite in modo che il determinante dei loro coefficienti sia diverso da zero e alle altre eventuali n - k incognite si attribuiscono valori arbitrari, (diventano cioè parametri).*

4. *Si viene in tal modo ad ottenere un sistema di k equazioni in k incognite (ed n - k eventuali parametri) il cui determinante dei coefficienti è diverso da zero, e perciò si può risolvere con la regola di Cramer. Gli n numeri così trovati costituiscono una soluzione del sistema lineare, di n equazioni in n incognite, dato.*

Da quanto detto segue che:
• $\boldsymbol{k < n}$. Allora il sistema ammette **infinite** soluzioni e precisamente si dice che il sistema ammette ∞^{n-k} soluzioni;
• $\boldsymbol{k = n}$. Allora il sistema ammette **una e una sola** soluzione; infatti per quanto detto precedentemente (e che sarà meglio spiegato in seguito) il sistema ammette $\infty^{n-k} = \infty^{n-n} = 1$ soluzione.

Resta inteso che se le due matrici, completa e incompleta, non hanno la stessa caratteristica, il sistema **non ha soluzioni**.

Vediamo ora alcuni esempi:

Esempi:

a) Risolvere il sistema

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = -2 \\ x - 2y + 5z = -1 \\ 2x + 3y - z = 11 \end{cases}$$

Poiché $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -42 \neq 0$, il sistema può essere risolto con la regola di Cramer e, risultando:

$$D_1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \\ 11 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 42,\ D_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 11 & -1 \end{vmatrix} = -210,$$

$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 11 \end{vmatrix} = -84$, la soluzione cercata è:

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{42}{-42} = -1; \; y = \frac{D_2}{D} = \frac{-210}{-42} = 5, \; z = \frac{D_3}{D} = \frac{-84}{-42} = 2.$$

b) Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = -1 \\ 2x - y + 3z = 0. \end{cases}$$

Poiché $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$, il sistema non si può risolvere con la regola di Cramer.
A tale sistema si applica il teorema di Rouché-Capelli, dopo aver osservato che il rango della matrice incompleta è 2, essendo $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, e che anche quello della matrice completa è ancora 2, perché tutti i suoi minori del terzo ordine:
$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix},$
sono tutti nulli, come si può verificare.

Il sistema, per il teorema di Rouché-Capelli, è perciò possibile e ammette $\infty^{n-k} = \infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni. Per trovarle basta risolvere, con la regola di Cramer, il sistema $\begin{cases} x + y = 1 - z \\ x - 2y = -1 - 2z. \end{cases}$ (dove z è *parametro*).

Si avrà:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 - z & 1 \\ -1 - 2z & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{1 - 4z}{3}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 - z \\ 1 & -1 - 2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{2 + z}{3}, \quad z = z,$$

dove z può assumere un valore arbitrario.

c) Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - 2z = 3 \\ 3x - y + z = 5. \end{cases}$$

Si può verificare che la matrice incompleta ha rango 2 in quanto:
$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ e } \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$

La matrice completa $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ ha invece rango 3, poiché:

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$

Ne segue che, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema dato non ammette soluzioni.

1.2 Sistemi di m equazioni in n incognite

Se $m \neq n$ (m equazioni, n incognite) le matrici, completa ed incompleta, saranno rispettivamente

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ di ordine } (m;n) \text{ e } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

di ordine $(m;n+1)$ e il rango della matrice incompleta non può superare il più piccolo tra i numeri m ed n. Anche in questo caso vale ovviamente il teorema di Rouché-Capelli e la regola pratica sopra enunciata, facendo bene attenzione al rango (della sottomatrice) della matrice incompleta. Per semplificare si consideri: *a)* $m > n$ *e b)* $m < n$.

• $m > n$. In questo caso si può estrarre dalla matrice incompleta una sottomatrice quadrata di ordine n; sia k il rango della matrice incompleta. Per la regola pratica se $k = n$ il sistema ha **una e una sola soluzione** calcolabile con la regola di Cramer (se anche il rango della matrice completa è uguale ad n) o **non ha soluzioni** (se il rango della matrice completa è maggiore di n); se $k < n$, il sistema ammette ∞^{n-k} **soluzioni** (se anche il rango della matrice completa è uguale a k) o **non ha soluzioni** (se il rango della matrice completa è maggiore di k);

• $m < n$. In questo caso si può estrarre dalla matrice incompleta una sottomatrice quadrata di ordine m; sia k il rango della matrice incompleta. Poiché $k \leq m < n$, per la regola pratica **il sistema non potrà mai avere una e una sola soluzione**, **ma ne avrà** ∞^{n-k} *(cioè sarà indeterminato)* **o sarà impossibile**, *in conseguenza al rango della matrice completa (teorema di Rouché-Capelli)*

Esempi:

a) Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 3x + 4y = 10 \\ 7x - 2y = 26 \end{cases}$$

ove m (equazioni) $> n$ (incognite).

Si può verificare che sia il rango della matrice incompleta $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$ che quello della matrice completa $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 3 & 4 & 10 \\ 7 & -2 & 26 \end{bmatrix}$ sono uguali a 2, essendo nullo l'unico minore del terzo ordine estratto dalla matrice completa. Pertanto si considerano solo le prime due equazioni del sistema dato, cioè quelle corrispondenti al minore del secondo ordine diverso da zero, ed il sistema diventa: $\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 3x + 4y = 10 \end{cases}$ con soluzione $x = \frac{62}{17}$, $y = -\frac{4}{17}$, calcolata con la regola di Cramer. In questo caso la soluzione trovata soddisfa anche la terza equazione, come si può facilmente verificare, e questa situazione si verifica quando una delle tre equazioni è combinazione lineare delle altre due (cioè si ottiene sommando membro a membro le altre due dopo averle moltiplicate rispettivamente per due numeri). Nel nostro caso, la terza equazione è uguale alla somma della prima moltiplicata per 2 e della seconda (moltiplicata per 1).

b) Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 5x + y = 7 \\ 2x - 3y = 4 \\ 10x + 2y = 5 \end{cases}$$

ove m (equazioni) $> n$ (incognite).

Facilmente si verifica che il rango della matrice incompleta $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$ è 2, mentre per la matrice completa si ha: $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 2 & -3 & 4 \\ 10 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 153 \neq 0$, per cui il suo rango è 3. Ne segue che il sistema è impossibile.

c) Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 8 \\ 3x + y - z = 10 \end{cases}$$

ove m (equazioni) $< n$ (incognite).

Per quanto osservato precedentemente il sistema non può avere una sola soluzione, ma sarà impossibile (nessuna soluzione) o indeterminato (infinite soluzioni). Poiché, come si può facilmente verificare, il rango della matrice incompleta è uguale a 2 ed anche il rango della matrice completa è uguale a 2, il sistema è allora compatibile ed ammette $\infty^{n-k} = \infty^{3-2} = \infty^1$. Il sistema diviene: $\begin{cases} 2x - 3y = 8 - 4z \\ 3x + y = 10 + z \end{cases}$ e si hanno le soluzioni (regola di Cramer),

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 - 4m & -3 \\ 10+m & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}},\ y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8-4m \\ 3 & 10+m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}},\ z = z\ ,$$

con z che può assumere valori arbitrari.

d) Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ 4x + 6y + 2z = 9. \end{cases}$$

ove m (equazioni) $< n$ (incognite).

Si può facilmente verificare (considerando le sottomatrici quadrate di ordine 2) che il rango della matrice incompleta $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ è uguale a 1, mentre il rango della matrice completa $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 6 & 2 & 9 \end{bmatrix}$ è uguale a 2. Non essendo uguali i due ranghi, il sistema è incompatibile (non ha soluzioni).

1.3 Sistemi lineari parametrici

Particolare importanza, specialmente per l'esame di stato, assume la risoluzione di sistemi parametrici; seguono esempi con uno, due e tre parametri rispettivamente.

Esempi:

a) Risolvere e discutere, al variare del parametro k il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + kz = 3 \\ x + ky + 3z = 2 \end{cases}$$

Per quanto riguarda la matrice incompleta si ha:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & k \\ 1 & k & 3 \end{vmatrix} = -k^2 + k + 6.$$

Tale determinante è $\neq 0$, e quindi il sistema è crameriano (cioè ammette una ed una sola soluzione) per $k \neq 2 \wedge k \neq -3$.

Per $k = 2$ si ha ovviamente: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$, per cui il rango della matrice incompleta non è 3 (ed è 2 come si può facilmente verificare), ed il sistema o è indeterminato o è impossibile.

Presa in considerazione la matrice completa $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$, per gli altri minori che si possono estrarre si osserva che:
$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$
e quindi anche la matrice completa non ha rango 3 (e quindi ovviamente due) per cui, per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è compatibile ed ammette $\infty^{n-k} = \infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni.

Per $k = -3$ si ha ovviamente: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0$, (e quindi il rango della incompleta non è 3), ma poiché dalla matrice completa $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ si può estrarre un minore $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, il rango della matrice completa è 3 ed il sistema è *impossibile.*

b) Si stabiliscano le relazioni cui debbono soddisfare a e b affinché il sistema di equazioni: $\begin{cases} ax + y + bz = 1 \\ x + y + az = 1 \\ x + ay + bz = 1 \end{cases}$ *ammetta un'unica soluzione o infinite soluzioni o nessuna soluzione.*

Affinché il sistema ammetta una e una soluzione è necessario che il determinante della matrice incompleta sia diverso da zero. Si ha:
$\begin{vmatrix} a & 1 & b \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix} = ab + ab + a - (b + a^3 + b) = 2b(a-1) - a(a^2-1) = (a-1)[2b - a(a+1)]$ e quindi il sistema ammette una ed una soluzione per $(a-1)[2b - a(a+1)] \neq 0$ e cioè per $a \neq 1 \wedge b \neq \dfrac{a(a+1)}{2}$.

Si hanno inoltre i seguenti casi:

i) $a - 1 = 0 \wedge 2b - a(a+1) \neq 0$

ii) $a - 1 = 0 \wedge 2b - a(a+1) = 0$

iii) $a - 1 \neq 0 \wedge 2b - a(a+1) = 0$

i) $a = 1 \wedge b \neq 1 \Rightarrow$ per la matrice incompleta $\begin{vmatrix} 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = 0$, ma anche la matrice completa $\begin{bmatrix} 1 & 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b & 1 \end{bmatrix}$ non può avere rango tre poiché la prima e la terza riga sono uguali e, per le proprietà dei determinanti, tutte le matrici del terzo ordine hanno determinante nullo $\Rightarrow$ il sistema è indeterminato o impossibile. Poiché si è posto $b \neq 1$ entrambe le matrici, completa e incompleta, hanno rango 2 e quindi il sistema è compatibile ed ammette $\infty^{n-k} = \infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni.

ii) $a = 1 \wedge b = 1 \Rightarrow$ per la matrice incompleta $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, ma anche la matrice completa $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ non ha rango 3 ed entrambe, come si può facilmente vedere hanno rango 1 $\Rightarrow$ il sistema è compatibile (teorema di Rouché-Capelli) ed ammette $\infty^{n-k} = \infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni.

iii) $a \neq 1 \wedge b = \dfrac{a(a+1)}{2} \Rightarrow$ la matrice incompleta $\begin{bmatrix} a & 1 & \frac{a^2+a}{2} \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & \frac{a^2+a}{2} \end{bmatrix}$ ha rango 2 (ovviamente non 3) e la matrice completa $\begin{bmatrix} a & 1 & \frac{a^2+a}{2} & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & \frac{a^2+a}{2} & 1 \end{bmatrix}$ ha almeno un minore di ordine 3 diverso da zero; infatti si ha:

$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 2a - 1 - a^2 = -(a-1)^2$che è diverso da zero per $a \neq 1 \Rightarrow$ la matrice completa ha rango 3 per cui il sistema è impossibile.

c) Determinare la condizione necessaria e sufficiente, con h, k, l parametri reali, per l'esistenza di soluzioni (una o infinite) del sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2z = h \\ 4x - z = k \\ x - 3y - 7z = l \end{cases}$$

Poiché $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -7 \end{vmatrix} = 0-1-24-(0-28+3) = 0$, il rango della matrice incompleta non è 3 (ma è 2 come si può facilmente verificare). Allora, affinché il sistema abbia soluzioni, anche la matrice completa deve avere rango 2, per cui tutti i minori di ordine tre che si possono estrarre dalla matrice devono essere nulli.

Si ha, considerando ovviamente solo gli altri tre minori:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & h \\ 0 & -1 & k \\ -3 & -7 & l \end{vmatrix} = -l + k - 3h; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & h \\ 4 & 0 & k \\ 1 & -3 & l \end{vmatrix} = -4l + 4k - 12h \text{ e}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & h \\ 4 & -1 & k \\ 1 & -7 & l \end{vmatrix} = -9l + 9k - 27h$, per cui in ogni caso, ponendoli uguali a zero, si ha la relazione cercata: $l + 3h - k = 0$.

Indice